

LNF-62/35

M. Bassetti: CALCOLI NUMERICI SUGLI EFFETTI DI CARICA SPAZIALE IN UN ANELLO D'ACCUMULAZIONE PER ELETTRONI E POSITRONI.

Nota interna: n° 135
5 Maggio 1962

LNF-62/35

Nota interna: n° 135
5 Maggio 1962

M. Bassetti: CALCOLI NUMERICI SUGLI EFFETTI DI CARICA SPAZIALE IN UN ANELLO D'ACCUMULAZIONE PER ELETTRONI E POSITRONI.

1. INTRODUZIONE

Come scritto (1) in una precedente nota interna gli effetti di carica spaziale in Adone hanno influenza essenzialmente sulle oscillazioni verticali di betatrone. Infatti le dimensioni radiali del fascio sono di circa 3 ordini di grandezza superiori a quelle verticali e gli spostamenti provocati dalle forze elettromagnetiche di interazione sono dello stesso ordine di grandezza sia in senso verticale che orizzontale. Di conseguenza tali spostamenti risultano determinanti in senso verticale e trascurabili in senso radiale.

Studieremo quindi gli effetti di carica spaziale soltanto sulle oscillazioni verticali di betatrone. Faremo ancora le seguenti approssimazioni:

- 1) I calcoli sono eseguiti per unità di lunghezza radiale come se il fascio fosse infinitamente largo ed uni

forme radialmente.

2) Le dimensioni dei fasci lungo l'ascissa curvilinea della macchina sono piccole in confronto alla lunghezza d'onda delle oscillazioni verticali di betatrone. Ne consegue che l'effetto delle forze elettromagnetiche di un fascio su ogni particella dell'altro può schematizzarsi con una discontinuità angolare. E' questa la cosiddetta approssimazione di lente sottile.

Prima di addentrarci nei risultati dei calcoli diamo un breve cenno di teoria delle macchine acceleratrici, quanto basta per una più facile comprensione di ciò che è scritto in seguito.

Il moto verticale delle particelle è caratterizzato da due parametri $z(s)$ e $z'(s)$ ove il primo è la quota rispetto al piano mediano della macchina e il secondo è la derivata del primo rispetto all'ascissa curvilinea presa lungo una curva di riferimento intrinseca alla struttura della macchina.

Dalla teoria lineare risulta che rappresentando $Z(s)$ e $Z'(s)$ sotto forma di un vettore $\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$ i due vettori relativi a due ascisse curvilinee s_1 e s_2 sono legati tra loro da una relazione del tipo:

$$(1) \begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu_{12} + \alpha_{12} \sin \mu_{12} & \beta_{12} \sin \mu_{12} \\ -\frac{1 + \alpha_{12}^2}{\beta_{12}} \sin \mu_{12} & \cos \mu_{12} - \alpha_{12} \sin \mu_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix}$$

ove a destra s'intende di eseguire il prodotto righe per colonne. La matrice è indipendente dal vettore iniziale ed acquista un significato preciso quando s_1 e s_2 coincidono (dopo un giro di macchina) oppure sono a distanza di un periodo strutturale di macchina. In tal caso μ , β e α hanno il seguente significato.

μ è indipendente dall'ascissa curvilinea iniziale e rappresenta l'angolo di oscillazione di betatrone in un giro di macchina o in un periodo. In seguito con μ ci riferiremo sempre all'angolo relativo a un periodo definito tra due zone successive di incrocio dei fasci; il periodo, così definito, può comprendere uno o più periodi di struttura di macchina, e quindi il μ può essere anche maggiore di π , senza che si abbia instabilità nel senso convenzionale.

$\sqrt{\beta(s)}$ è proporzionale all'involuppo delle oscillazioni punto per punto.

$\chi(s)$ è proporzionale a $\frac{d\beta(s)}{ds}$ ed è in particolare nullo nei punti di β_{\max} e β_{\min} .

In assenza di interazione le dimensioni verticali del fascio di particelle sono determinate da due fenomeni contrastanti: il damping, che tende ad annullare le dimensioni del fascio, lo scattering e le fluttuazioni di radiazione che al contrario tendono ad allargarlo. Alle bassissime pressioni, dell'ordine 10^{-9} - 10^{-10} mm lo scattering diventa trascurabile in confronto alle fluttuazioni di radiazione.

2. RISULTATI DEI CALCOLI

Tramite un programma in Fortran adatto al calcolatore IBM 7090 è possibile seguire l'evoluzione del moto verticale di molte particelle contemporaneamente e calcolare esattamente l'interazione ad ogni incrocio così come è determinata dalla posizione delle particelle. Sarebbe desiderabile seguire un numero grandissimo di particelle. Per ragioni di capacità di memoria e di velocità di esecuzione dei calcoli ciò è impossibile. In pratica il calcolo è stato eseguito fissando un numero di par

ticelle fittizie eguali a 1000 per ogni fascio. Ad ognuna di queste particelle fittizie è stata attribuita una massa ed una carica tali da conservare il rapporto tra carica e massa e conseguire egualmente i limiti di corrente voluti. Il damping è simulato rendendo il determinante della matrice di macchina leggermente minore di 1. L'effetto dello scattering e delle fluttuazioni di radiazione è invece simulato tramite un sottoprogramma in linguaggio base che addiziona a caso alla z' delle singole particelle una quantità fissa in più o meno, in punti della macchina pure essi scelti a caso. Il calcolo può simulare una macchina che funzioni in 1^a e 2^a armonica a scelta. Ricordiamo che l'ordine dell'armonica si può definire come il numero K di periodi di radiofrequenza che entrano in un periodo T di rotazione di macchina. Ad ognuno di questi periodi di radiofrequenza è associato un pacchetto di elettroni e uno di positroni. Se K è l'armonica di lavoro ci sono dunque K pacchetti di elettroni e K pacchetti di positroni, equidistanti tra loro, distribuiti lungo la circonferenza della macchina. Supponiamo che ad un certo istante i K pacchetti di elettroni siano sovrapposti ai corrispondenti K pacchetti di positroni. I K punti di sovrapposizione sono altrettanti punti d'incrocio. Successivamente l'angolo di macchina $\frac{2\pi}{K}$ che separa due pacchetti che si vanno incontro è percorso con velocità angolare doppia di quella d'ogni particella. Quindi dopo un tempo pari a $\frac{T}{2K}$ hanno luogo altri K incroci intermedi ai precedenti. In tutto si hanno $2K$ punti di incrocio. In uno di questi è posta la radiofrequenza. In un periodo di macchina in ogni punto d'incrocio avvengono K incroci.

In pratica ciò che interessa (2) è la luminosità

tà definita come:

$$(2) \quad L = \frac{f}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_+(z) \rho_-(z) dz$$

ove f è la frequenza di rotazione

K è l'armonica di lavoro

ρ_+ e ρ_- sono le densità di particelle circolanti ridotte a sola funzione di Z .

I calcoli sono stati eseguiti nelle ipotesi $\rho_+ = \rho_-$ (qualche volta $\rho_+ \neq \rho_-$); $\alpha = 0$; $K = 1$ (un caso ha $K = 2$).

I risultati sono riportati in fig. 1 ove in ascissa è riportata la corrente, in ordinata la luminosità ed accanto ad ogni punto il valore di μ .

I punti della fig. 1 e 2 che sarà richiamata più sotto sono calcolati per i seguenti parametri di macchina:

$$\beta = 2,2 \text{ metri}$$

$$K = 2$$

$$\alpha = 0$$

$$f = 6 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$$

$$W = 5,6 \text{ mm}$$

$$\gamma = 1500$$

$$\langle z \rangle = 5 \mu$$

I simboli ancora non noti sono:

I corrente totale delle particelle di un segno

$\langle z \rangle$ semialtezza equivalente di una distribuzione rettangolare a densità uniforme e pari alla massima

W semilarghezza equivalente definita in modo analogo alla z

γ rapporto tra energia delle particelle e energia di riposo.

Sia $\langle z \rangle$ che W si riferiscono alle dimensioni verticali e radiali raggiunte a regime, da un solo fascio circolante; per la loro determinazione vedere, ad esempio, in (3).

I calcoli eseguiti per una data macchina sono utilizzabili per un'altra macchina di caratteristiche diverse attraverso fattori di scala. Si passa da una macchina ad un'altra tramite le relazioni:

$$(3) \quad I_1 = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \frac{\langle \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_2 \rangle} \frac{w_1}{w_2} \frac{k_1}{k_2} I_2$$

$$(4) \quad L_1 = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2 \frac{\langle \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_2 \rangle} \frac{f_1}{f_2} \frac{k_1}{k_2} \frac{w_1}{w_2} \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$$

ove gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due macchine.

Per il legame tra le grandezze fisiche e i parametri del programma di calcolo vedere l'appendice A.

La fig. 1 mostra una forte dipendenza della luminosità dalla corrente dei fasci e dall'angolo μ di oscillazione verticale di betatrone tra un'interazione e un'altra. La linea retta, che in scala lineare è una parabola, rappresenta quale sarebbe la luminosità se al crescere della corrente dei due fasci la distribuzione spaziale non risentisse degli effetti di carica spaziale.

Consideriamo i punti di eguale μ cioè la funzione $L(I, \mu = \text{cost})$. Per correnti deboli, in alcuni casi la luminosità è superiore al valore che si avrebbe senza interazione, poi discende in ogni caso al di sotto della retta continuando a crescere con potenza inferiore a I^2 e infine tende a zero. Luminosità nulla significa che i fasci per effetto dell'interazione si separano totalmen-
te.

Consideriamo ora i punti di eguale I , cioè la funzione $L(I = \text{cost}, \mu)$. Come funzione del solo μ la luminosità risulta periodica con periodo π . La funzione $L(\mu)$ ha inoltre una discontinuità per $\mu = \pi$. Per μ di poco inferiore a π la luminosità è molto bassa. Per μ di poco superiore a π la luminosità è molto alta.

A rappresentare gli effetti di deformazione dei fasci dovuti all'interazione è più indicativa la fig. 2 che rappresenta in funzione della corrente il rapporto tra la luminosità effettiva e quella che si avrebbe senza interazione, qualora cioè le dimensioni dei due fasci restassero uguali a quelle raggiunte a regime da un solo fascio circolante, e le due distribuzioni di carica fossero esattamente sovrapposte.

3. INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI

I risultati dei calcoli si accordano abbastanza bene con la seguente interpretazione.

Supponiamo di avere un fascio di particelle che viaggi in un senso e una sola particella che viaggi in senso contrario in prossimità del piano mediano di macchina. Quest'ultima non vede soltanto il campo magnetico della macchina ma anche il campo elettromagnetico del fascio. Supponendo la densità di questo costante con buona approssimazione nell'intorno del piano mediano la particella isolata risente una forza elastica nella zona di incrocio, proporzionale alla densità dell'altro fascio. Poichè il tratto d'incrocio è breve l'interazione può tradursi con una matrice di lente sottile. In definitiva è come se l'unica particella vedesse una macchina la cui matrice tra un'interazione e l'altra è:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{\sin \mu}{\beta} & \cos \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \mu - \beta F \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{\sin \mu + \beta F \cos \mu}{\beta} & \cos \mu \end{vmatrix}$$

F come funzione di z è legata alla densità di carica dalla relazione

$$(6) \quad F(z) = \frac{a}{z} \left[\int_{-\infty}^z g(u) du - \int_z^{+\infty} g(u) du \right]$$

ove a è un coefficiente di proporzionalità dipendente da costanti fisiche e dall'energia delle particelle.

La particella percorrerà orbite stabili finchè la matrice risultante avrà traccia minore di 2. Questa condizione si traduce in una limitazione su F cioè sulla densità (non sul numero) di cariche accumulabili.

Affinchè si abbia stabilità deve risultare:

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 < F < \frac{2}{\beta} \cot \frac{\mu}{2} & \quad 0 < \mu < \pi \\ 0 < F < -\frac{2}{\beta} \tan \frac{\mu}{2} & \quad \pi < \mu < 2\pi \end{aligned}$$

Queste due formule mostrano la citata discontinuità della luminosità per $\mu = \pi$. Poco prima di π il valore di F che da l'instabilità è pressochè zero, mentre immediatamente dopo esso è molto elevato.

Il fatto che le disuguaglianze (7) siano soddisfatte, non esclude l'esistenza di orbite chiuse esterne al fascio (vedere Append. B); assicura però che, essendo l'orbita centrale stabile, verso di essa convergono ed i vi rimangono, le particelle che, inizialmente oscillanti intorno ad un'orbita chiusa esterna, da essa si allontano per effetto dello scattering o delle fluttuazioni.

Consideriamo ora il caso di due fasci di intensità confrontabile. Le particelle dei due fasci assumeranno un equilibrio statistico con certe dimensioni verticali nella zona di incrocio. Per quanto già detto tali dimensioni saranno proporzionali a $\sqrt{\beta}$. Sia β che μ non sono determinati però esclusivamente dalla struttura di macchina ma anche dalla presenza dei fasci. Cioè bis

gna trovare i nuovi β', μ' relativi alla nuova matrice tali che:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \cos \mu' + d \sin \mu' & \beta' \sin \mu' \\ -\frac{1+d^2}{\beta'} \sin \mu' & \cos \mu' - d \sin \mu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \mu - \beta F \sin \mu & \beta \sin \mu \\ \frac{\beta \mu + \beta F \cos \mu}{\beta} & \cos \mu \end{vmatrix}$$

Si ricava con qualche passaggio:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mu' &= \arccos(\cos \mu - \frac{1}{2} \beta F \sin \mu) \\ \beta' &= \beta / \sqrt{(1 - \frac{1}{4} \beta^2 F^2) + \beta F \cot \mu} \end{aligned}$$

Si vede dall'ultima formula perchè per $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < \mu < \frac{3\pi}{2}$ la luminosità supera i valori che si avrebbero senza deformazione. Per piccoli valori di F , F^2 è trascurabile, d'altra parte $\cot \mu$ è positiva da cui $\beta' < \beta$, cioè si ha un effetto di strizione..

E' difficile valutare quantitativamente questo effetto a priori per più ragioni: F non è costante per tutte le particelle in quanto la densità dei fasci non è uniforme, la deformazione di un fascio si ripercuote in un aumento medio dell' F visto dalle particelle dell'altro, quindi in una deformazione dell'altro fascio e così via.

Al crescere di F β' passa per un minimo, per riaumentare poi, tendendo all'infinito quando F raggiunge i limiti dati dalla (7), come si può controllare sostituendo questo valore di F nella (9).

Quando le correnti dei fasci raggiungono valori tali che i limiti di instabilità sono superati le cose mutano radicalmente. Per mostrare questo è opportuno ri-

trovare gli stessi limiti di instabilità attraverso considerazioni un pò diverse.

Determiniamo le condizioni necessarie perchè sia possibile un'orbita chiusa su una o due interazioni. In questo caso supponiamo che la matrice resti quella di macchina e che nella zona di interazione la particella subisca una discontinuità angolare $\Delta z'$. I due modi di calcolo sono legati l'uno all'altro dalla relazione:

$$(10) \quad \Delta z' = -Fz$$

La condizione di esistenza dell'orbita chiusa si traduce nella:

$$(11) \quad \pm \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{\sin \mu}{\beta} & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

ove il segno più vale per l'orbita chiusa su un'interazione e il meno per quella chiusa su due interazioni. La (11) comporta l'annullamento di un determinante del 2° ordine, che, tramite la (10), si traduce in una limitazione sul valore di F. Le due limitazioni sono le stesse già trovate per l'instabilità. Per

$$\pi < \mu < 2\pi$$

è possibile l'orbita chiusa dopo un'interazione e per

$$0 < \mu < \pi$$

quella chiusa dopo due interazioni.

Lo scostamento z dell'orbita chiusa dall'asse è determinabile tramite le seguenti relazioni

$$(12) \quad \begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{\beta} \cotg \frac{\mu}{2} & 0 < \mu < \pi \\ F(z) &= -\frac{z}{\beta} \cotg \frac{\mu}{2} & \pi < \mu < 2\pi \end{aligned}$$

Ricordando la (6), che, nel caso di distribuzione simmetrica, può scriversi:

$$(6') \quad F(z) = \frac{a}{z} \int_0^z \rho(z') dz' = a \bar{F}(z)$$

essendo $\bar{F}(z) > \bar{F}(z)$ prima dell'instabilità, data la distribuzione gaussiana del fascio, risulta:

$$F(z) < F(0)$$

Ciò vuol dire che le orbite chiuse calcolate nascono al centro del fascio, per poi spostarsi all'esterno via via che la densità aumenta.

Si possono calcolare orbite chiuse su più di una o due interazioni e risulta che esse nascono per densità di carica più basse e sono più ampie a parità di cariche accumulate.

Per densità di carica al centro dei fasci maggiore di quella che corrisponde al limite di instabilità, le distribuzioni dei due fasci assumono configurazioni stabili che possono essere simili oppure diverse; tra i due casi, che si verificano a seconda del valore di λ non c'è una differenza sostanziale. Prendiamo in esame il secondo caso nel quale un fascio rimane stretto al centro e l'altro s'allarga attorno al primo; quello al centro risente poco della presenza dell'altro.

La maggior parte delle particelle del fascio allargato percorre orbite esterne al fascio più interno. In queste condizioni ognuna di queste particelle attraversando la zona di interazione subisce una discontinuità angolare costante in valore e positiva o negativa a seconda che la particella passi sotto o sopra l'altro fascio. Schematizziamo la distribuzione di densità del fa-

scio stretto con una δ . Così impostato il problema della ricerca di orbite chiuse (vedere Append. B) si può risolvere esattamente. Nel piano z, z' considerato nella zona di incrocio ogni orbita chiusa di ordine n è rappresentata da n punti, successivi punti di passaggio di una particella che la percorra.

Attorno ad ognuno di questi punti possiamo immaginare una buca; in assenza di damping e di scattering, le particelle interne a queste buche nella loro evoluzione ruotano attorno al punto centrale mentre quelle esterne compiono traiettorie non periodiche nella successione dei passaggi (sopra e sotto) rispetto all'altro fascio e tutte esterne alle buche. In presenza di damping le orbite chiuse sono egualmente possibili. L'effetto combinato del damping e dello scattering forma attorno ai centri delle buche dei fasci di dimensioni dello stesso ordine di grandezza del fascio senza interazione. (v. fig.3).

La durata della permanenza delle particelle nelle buche dipende in modo violento dal rapporto tra la grandezza della buca e le dimensioni del fascio.

Allorchè l'intensità del fascio al centro cresce, tutta la configurazione delle orbite chiuse e le dimensioni delle relative buche mutano secondo un'omotetia rispetto all'origine degli assi. Al di sopra di una certa intensità le dimensioni delle buche saranno aumentate a tal punto che la probabilità che una particella riesca a sganciarsi da un'orbita chiusa diviene pressochè nulla. In questo caso la configurazione definitiva viene a dipendere fortemente dalle condizioni iniziali. Per più basse densità di corrente del fascio (interno) le particelle riescono a sganciarsi dalle orbite chiuse e spiralizzano al centro, magari attraversando altre orbite chiu

se.

Pervenendo però al centro trovano l'instabilità per cui sono lanciate violentemente verso l'esterno e ricominciano il ciclo daccapo. Il tutto può paragonarsi ad una fontana ove l'acqua confluisce al centro per essere rilanciata all'esterno.

In queste condizioni però la luminosità è già assai bassa perchè la sovrapposizione dei fasci è pressochè nulla.

Mostriamo ora perchè la luminosità sia periodica in μ con periodicità π anzichè 2π .

Consideriamo due macchine di cui la seconda abbia $\mu_2 = \mu_1 + \pi$. La matrice di macchina della seconda macchina può pensarsi ottenuta dalla prima moltiplicata per la matrice relativa a π che, come è noto, è la matrice di riflessione.

Immaginiamo che ad una certa interazione la conformazione dei due fasci sia identica. Immediatamente prima dell'interazione successiva le due conformazioni saranno capovolte rispetto al piano mediano. Ciò però non ha influenza nell'interazione, che dipende non dalla posizione assoluta dei due fasci ma da quella relativa. Anche dopo l'interazione dunque le due conformazioni si ottengono l'una dall'altra per riflessione. Dopo due interazioni la situazione è identica, dopo tre capovolta e così via. Tutto ciò non ha influenza ovviamente sulla luminosità.

Vogliamo infine accennare brevemente ad una precisazione nell'ipotesi 1) dell'inizio.

In realtà quest'ipotesi non è vera, il fascio non è infinitamente largo nè uniforme radialmente. Tuttavia per la validità del calcolo è necessario soltanto

che la densità radiale dei fasci, punto per punto, non dipenda dal tempo, e questo è senz'altro vero statisticamente.

Nel caso più generale di densità radiale non uniforme, per ottenere la luminosità "effettiva" occorre mediare la luminosità ottenuta per densità uniforme sulla distribuzione radiale di corrente:

$$(13) \quad L_{\text{eff}} = \frac{\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} L(I(r')) \rho(r') dr'}{\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \rho(r') dr'}$$

ove $I(r')$ è la corrente che si avrebbe se fosse $\rho(r) = \text{cost} = \rho(r')$.

4. CONCLUSIONI

Concludendo, i calcoli eseguiti mostrano che in un anello d'accumulazione la luminosità è tanto più elevata quanto più, decrescendo, il μ si avvicina a $m\pi$, essendo m un numero intero qualsiasi. Va però ricordato che il calcolo è stato eseguito introducendo molte approssimazioni e per di più nell'ipotesi di macchina acceleratrice senza errori. L'andamento reale della funzione $L(I = \text{cost}, \mu)$ difficilmente presenterà una discontinuità nell'intorno di π ; quanto sia ampio quest'intervallo attorno a π di non validità del calcolo non è facile prevedere.

Risalta comunque l'opportunità di costruire una macchina a funzioni separate, nella quale sia possibile variare il μ . Ciò perchè anche se risultasse che è possibile lavorare con angoli critici ($\mu \approx \pi$) quando i due

fasci sono ambedue presenti, ciò non è certamente possibile quando si ha un fascio solo circolante, oppure ambedue, ma a bassa densità.

Infatti, in assenza di interazione $\mu \approx \bar{\nu}$ significa che la traccia della matrice di macchina è di poco inferiore a 2, che è il limite di stabilità nel senso convenzionale; piccoli errori di costruzione come è ben noto possono portare all'instabilità. In presenza di interazione invece ogni particella vede una matrice non lineare e un μ equivalente molto diverso da $\bar{\nu}$; la criticità di conseguenza scompare.

E' opportuno infine prevedere dei mezzi per aumentare la luminosità.

Dalle formule (3) e (4) appare come, a parità di tutti gli altri parametri, sia le correnti da accumulatore che la luminosità sono proporzionali alle dimensioni verticali dei fasci in assenza di interazione. Qualsiasi metodo che riesca ad aumentare queste dimensioni è quindi opportuno; tra essi possiamo ricordare l'incrocio ad angolo oppure un debole accoppiamento tra moto verticale e radiale che trasferisca verticalmente parte delle dimensioni radiali.

Ringrazio F. Amman per la valida critica e gli utili suggerimenti con i quali ha seguito costantemente il progredire di questo lavoro.

Ringrazio inoltre C. Pellegrini, che proposè inizialmente questo tipo di calcolo numerico e che efficacemente contribuì alla prima stesura del programma.

APPENDICE A

Diamo un breve cenno sul programma di calcolo in trodotto nella 7090 IBM, sulle relazioni che legano i parametri del programma alle grandezze fisiche e su prove supplementari eseguite.

I parametri di interesse fisico di ingresso del programma sono:

ALFA, BETA, MU caratterizzanti le matrici di macchine

DAMP il cui quadrato è pari al determinante della matrice di cui sopra

K ordine dell'armonica

DE(I) proporzionali alle intensità di corrente dei fasci

DELTA(I) inversamente proporzionale all'intervallo in z , in unità di larghezza quadratica media, di una gaussiana nel quale cadono le 1000 particelle fittizie

DILE(I) proporzionale alle massime dimensioni iniziali dei fasci

DZP proporzionale alla discontinuità angolare che simula lo scattering.

Il calcolo si svolge nel modo seguente.

Partendo da condizioni iniziali determinate dai parametri di ingresso, a tutti i 2000 vettori iniziali (o 4000 nel caso di $K = 2$) viene applicata la matrice di macchina. Successivamente viene applicato lo scattering calcolato però come se fosse avvenuto lungo tutto il trato tra un'interazione e un'altra.

Viene quindi calcolata l'interazione che è schematizzata così.

Per ogni particella è calcolata la differenza tra il numero delle particelle dell'altro fascio che le stanno sopra, e il numero di quelle che stanno sotto, così come sono le posizioni all'istante dell'interazione.

Alla 2^a componente del vettore di ogni particella è som-
mata una discontinuità angolare proporzionale alla diffe-
renza così calcolata e all'intensità della corrente del
l'altro fascio.

Poi tutto ricomincia dall'inizio prendendo come
condizioni iniziali gli ultimi valori dei vettori.

Nel caso di 2^a armonica si tiene conto che ogni
fascio interagisce alternativamente con gli altri due.

La simulazione dello scattering come descritto
avviene solamente nell'ultima versione del programma. Per
la maggior parte dei punti della Fig. 1 e 2 lo scatte-
ring era applicato nella sezione di interazione, anzichè
in punti a caso. Poichè tale approssimazione perde ogni
valore per $\mu = \bar{\mu}$, è stato modificato. Il calcolo è stato
sempre eseguito in modo che ogni particella nell'inter-
vallo tra un'interazione e un'altra subisse con certezza
uno scattering, ma un parametro d'entrata dell'ultima ver-
sione del programma permette di sostituire a questa cer-
tezza una probabilità inferiore a 1. Prove di controllo
hanno mostrato che le modifiche relative allo scattering
non portano variazioni apprezzabili dei risultati ottenu-
ti con la schematizzazione più semplice.

I dati di uscita del programma sono:

UM proporzionale al rapporto tra luminosità effettiva e
quella che si avrebbe senza deformazione

$P_c(z)$ ridotta a uno scaloidè di 100 caselle.

PROVE EFFETTUATE

Ponendo $DE(I) = 0$ e partendo da condizioni ini-
ziali arbitrarie, pur di procedere abbastanza nel calcolo
è stato accertato che si perviene in ogni caso a una di-
stribuzione gaussiana delle particelle lungo z con lar-

hezza quadratica media pari a:

$$\langle z^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta \cdot DZP}{2 \cdot (1 - DAMP^2)}$$

Queste prove sono state eseguite per più valori di DZP e DAMP.

Nei calcoli eseguiti per determinare $L(I, \mu)$ è stato posto in genere:

DAMP = : 994 DZP = $4.2 \cdot 10^{-4}$ tale che risulta:

$$\langle z^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ in unità di } \beta.$$

Per il valore di DAMP indicato la costante di damping è pari a 80 interazioni, valore fortemente alterato rispetto alla realtà. Pur tuttavia il rapporto tra la fluttuazione quadratica media del numero di particelle $10^{\frac{3}{2}}$ e la costante di damping è dello stesso ordine di grandezza del rapporto reale.

Per controllare l'influenza delle condizioni iniziali nel caso di forti correnti dei fasci per $\mu = 200^\circ$ è stato eseguito un caso con un fascio inizialmente 100 volte più largo dell'altro. La maggior parte delle particelle del fascio allargato ha spiralizzato verso il centro, ed infatti la luminosità raggiunge all'incirca lo stesso valore di un caso con gli stessi valori per I e eseguito con condizioni iniziali più strette. Ci sono tuttavia 10 particelle su 1000 che dopo circa 1000 interazioni (tenere presente che la costante di damping è pari a 80 interazioni) rimangono ancorate ad un'orbita chiusa molto esterna. E' facilmente prevedibile che per correnti maggiori questo fenomeno diventi più accentuato.

D'altra parte queste sono proprio le condizioni che si verificano in Adone quando un fascio molto intenso è già accumulato e si comincia ad iniettare il fascio

di particelle di segno contrario. Questo grave inconveniente è eliminabile modificando il μ ad iniezione già avvenuta.

Dai calcoli eseguiti sulle orbite chiuse risulta infatti (vedere Append. B) che le ampiezze delle orbite chiuse più pericolose sono crescenti in funzione di μ in certi intervalli, mentre in altri intervalli intercalati ai precedenti non possono esistere.

All'estremo sinistro dell'intervallo di esistenza c'è almeno un passaggio dell'orbita chiusa che va a ze ro, mentre all'estremo destro tutti i passaggi vanno allo infinito. Ciò è vero per le orbite chiuse più pericolose per le quali le ampiezze degli intervalli sono circa $\frac{\pi}{n}$ (v. App. B). Detto questo è comprensibile che se diminuiamo il μ da $(\pi + \beta)$ a $(\pi + \alpha)$ tutte le orbite di ordine superiore a $\frac{\pi}{\beta - \alpha}$ o $\frac{2\pi}{\beta - \alpha}$ risultano eliminate poichè hanno attraversato nella variazione di μ almeno un intervallo di non esistenza.

In questo processo continuo le particelle che percorrevano tali orbite chiuse vanno al centro e non sulla ciambella poichè gli scostamenti massimi delle orbite chiuse decrescono col μ . Esse si ristabiliscono soltanto se la densità dell'altro fascio è tale da rendere instabile l'orbita centrale.

La maggior parte dei punti di Fig. 1 sono stati determinati partendo da condizioni iniziali vicino a quelle a regime di un fascio solo e calcolando da 150 a 300 interazioni e facendo la media sulle ultime 20-30 interazioni. Le formule che legano le correnti e le luminosità ai parametri del programma sono:

$$L = \frac{I K W \gamma^2}{(2\pi)^2 r_e^2} \left(\frac{\beta^*}{\beta} \right)^2 \left(\frac{z}{z^*} \right) U M^* D E^*(1) D E^*(2)$$

$$I = \frac{f e \gamma w r}{2\pi r_e} \left(\frac{\beta^*}{\beta}\right) \left(\frac{z}{z^*}\right) 2 \delta E$$

con $q = 10^{+3}$ numero di particelle fittizie. Le grandezze con a sterisco sono relative al programma.

Il programma di calcolo alla IBM 7090 è stato preceduto e completato da numerosi programmi minori introdotti nella IBM 1620 dei laboratori. Ciò è risultato utilissimo per chiarire molte questioni relative al programma maggiore e interpretarne i risultati.

APPENDICE B

In questa appendice calcoliamo le orbite chiuse nell'approssimazione, già accennata avanti, di distribuzione a $\delta(z)$ della $\xi(z)$ di un fascio. Trascuriamo l'influenza del damping che non altera apprezzabilmente i risultati.

Per rendere più spedita la notazione indichiamo con M la matrice di macchina, con $V_j = \begin{pmatrix} z_j \\ z'_j \end{pmatrix}$ il vettore della particella dopo la j esima interazione, Δ_j il vettore che rappresenta la j esima interazione pari in ogni caso a $\begin{pmatrix} 0 \\ p_j \Delta z' \end{pmatrix}$ ove $p_j = \pm 1$ e z' è costante. Con questa notazione otteniamo:

$$V_{j+1} = M V_j + \Delta_{j+1}$$

$$V_{j+i} = M^i V_j + M^{i-1} \Delta_{j+1} + \dots + M^{i-m} \Delta_{j+m} + \Delta_{j+i}$$

Se vogliamo che dopo n interazioni si abbia un'orbita chiusa deve risultare:

$$(a) \quad V_{j+n} = V_j \text{ cioè: } (M^n - 1)V_j = - (M^{n-1} \Delta_{j+1} + \dots + \Delta_{j+1})$$

Affinchè un'orbita risulti poi effettivamente possibile dovrà risultare:

$$(b) \quad z_j p_j < 0 \text{ per interazioni elettroni-positroni e}$$

$$z_j p_j > 0 \text{ per interazioni elettroni-elettroni}$$

Ciò perchè per particelle diverse l'interazione è attrattiva e per particelle eguali è repulsiva.

Assumiamo la matrice M della forma:

$$M = \begin{vmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{vmatrix}$$

Ciò significa porre $\alpha = 0$ e cioè β minimo o massimo, che è il caso di interesse per noi, poichè in Adone nella zona di interazione si ha β minimo; significa inoltre porre $\beta = 1$. Un diverso valore di β comporta semplicemente un cambiamento di scala.

La soluzione delle equazioni (a) conduce alle formule:

$$z_j = \Delta Z' \frac{\sum_{k=1}^n p_{j+k} \cos (k - \frac{n}{2}) \mu}{2 \sin \frac{n}{2} \mu} \quad (\text{v. fig. 4})$$

(d)

$$z_j = \Delta Z' \frac{\sum_{k=1}^n p_{j+k} \sin (k - \frac{n}{2}) \mu}{2 \sin \frac{n}{2} \mu}$$

che posto: $V_j^* = z_j + iz_j$ possono scriversi:

$$(e) \quad V_j^* = \frac{\Delta Z^*}{2 \sin \frac{n}{2} \mu} \sum_{k=1}^n p_{j+k} e^{i(k - \frac{n}{2}) \mu}$$

Un primo risultato che possiamo dedurre da queste formule è il diametro delle buche attorno alle orbite chiuse; esso determina la distanza massima che una particella può avere da quella che percorre l'orbita chiusa per ruotargli attorno indefinitamente.

La particella 1 percorre un'orbita chiusa. Per una particella 2 generica può scriversi:

$$V_{j,2} = V_{1,j} + \Delta V_j$$

Dopo un'interazione sarà:

$$V_{j+1,2} = (MV_{j,1} + \Delta_{j+1}) + M\Delta V_j = V_{j+1,1} + M\Delta V_j$$

e dopo K interazioni:

$$V_{j+K,2} = V_{j+K,1} + M^K \Delta V_j$$

Affinchè la successione delle interazioni per le due particelle sia fisicamente sempre la stessa $z_{j+K,2}$ e $z_{j+K,1}$ devono avere sempre lo stesso segno, cioè deve essere:

$$|\Delta V_j| \leq z_{K,1} \quad K = 1, 2 \dots n$$

cioè nel piano z, z' la particella 2 può distare dalla particella 1 al massimo di una distanza pari alla minima tra le $z_{K,1}$, cioè alla minima distanza, nei successivi passaggi della particella 1 nelle zone d'incrocio, dal piano mediano.

Mettiamo ora in evidenza una proprietà che lega le orbite chiuse relative a due angoli μ_1 e μ_2 che differiscono da π .

Sia data un'orbita relativa ad un angolo μ , chiusa su n interazioni. Pensiamo ora di inserire tra ogni interazione e la successiva in un punto ad arbitrio della ascissa curvilinea di macchina una matrice di riflessione. In questo caso tutto avviene come se l'angolo μ , fosse incrementato o diminuito di $\bar{\nu}$. Sia i passaggi dell'orbita chiusa che le interazioni cambiano alternativamente segno (perchè la particella passa dalla parte opposta). Di conseguenza se n è pari l'orbita chiusa modificata rimane chiusa su n interazioni, se n è dispari rimane chiusa su $2n$ interazioni.

Es.:

$$\begin{array}{ll}
 // + + - // + + - // + + - // & n=3; \mu_1 \\
 // + - - - + + // + - - & n=6; \mu_2 = \mu_1 \pm \pi \\
 // + + - - // + + - - // & n=4; \mu_1 \\
 // + - - + // + - - + // & n=4; \mu_2 = \mu_1 \pm \pi \\
 // + // + // + // + // & n=1; \mu_1 \\
 // + - // + - // & n=2; \mu_2 = \mu_1 \pm \pi
 \end{array}$$

Poichè sia z_j che p_j cambiano segno, anche la orbita chiusa per $\mu_2 = \mu_1 \pm \pi$ è fisicamente possibile se tale è quella per μ_1 , restando automaticamente soddisfatte le condizioni di consistenza b).

Indichiamo ora un metodo che permette di individuare le orbite chiuse più ampie e quindi più pericolose. Riprendiamo a tale scopo la formula che dà le orbite chiuse:

$$(e) \quad V_j^* = \frac{\Delta z_j}{2\mu \frac{z_j}{\mu}} \sum_{k=1}^n \beta_j + k e^{i(k - \frac{n}{2})\mu}$$

Poniamo ciascuno degli n vettori $e^{iK\mu}$ sotto forma della somma di n vettori ruotanti. Cioè poniamo:

$$(f) \quad e^{iK\mu} = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{i(jk - \frac{2\pi}{n})}$$

per calcolare β_m moltiplichiamo per e sommiamo su K ; risulta:

$$\sum_{k=1}^n e^{i(k\mu - m\mu \frac{2\pi}{n})} = \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{k=1}^n e^{i[(k(j-m) - \frac{2\pi}{n})]}$$

ma:

$$\sum_{k=1}^n e^{i[k(j-m)\frac{2\pi}{n}]} = n \delta_{mj}$$

poichè per $j \neq m$ si ha la somma di n vettori ruotanti a risultante nulla, per cui:

$$S_{jm} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{ik(\mu - m\frac{2\pi}{n})}$$

la somma a secondo membro è una progressione geometrica che da

$$S_{jm} = e^{i(\frac{n+1}{2})(\mu - m\frac{2\pi}{n})} \frac{\sin \frac{n}{2}(\mu - m\frac{2\pi}{n})}{n \sin \frac{1}{2}(\mu - m\frac{2\pi}{n})} \quad (\text{v. fig. 5})$$

Per $\mu \approx m(2\pi/n)$ un solo vettore ruotante ha importanza nella (f). La (e) con alcuni passaggi algebrici diviene:

$$V_j^* \approx A(\mu, m, n) \sum_{k=1}^n P_{j+k} e^{ikm\frac{2\pi}{n}}$$

ove:

(g)

$$A(\mu, m, n) = \frac{(-1)^m \Delta \Sigma^j e^{\frac{1}{2}(\mu - m\frac{2\pi}{n})} \sin \frac{n}{2}(\mu - m\frac{2\pi}{n})}{2 \sin \frac{\mu}{2} n \sin \frac{1}{2}(\mu - m\frac{2\pi}{n})}$$

Per due passaggi generici abbiamo :

$$V_S^* \approx A(\mu, m, n) \sum_{k=1}^n P_{S+k} e^{ikm\frac{2\pi}{n}}$$

$$V_E^* \approx A(\mu, m, n) \sum_{k=1}^n P_{E+k} e^{ikm\frac{2\pi}{n}}$$

cioè:

$$V_t^* = V_s^* \frac{\sum_{k=1}^n p_{t+k} e^{ikm \frac{2\pi}{n}}}{\sum_{k=1}^n p_{s+k} e^{ikm \frac{2\pi}{n}}}$$

e posto:

$$t + k = s + (k + t - s) = s + k'$$

da cui:

$$k = k' - (t - s) \text{ si ottiene:}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_{t+k} e^{ikm \frac{2\pi}{n}} &= \\ &= \sum_{k'=t-s}^{n+t-s} p_{s+k'} e^{i[k'-(t-s)]m \frac{2\pi}{n}} = \\ &= e^{-i(t-s)m \frac{2\pi}{n}} \sum_{k'=t-s}^{n+t-s} p_{s+k'} e^{ik'm \frac{2\pi}{n}} \end{aligned}$$

ma sia p_n sia $e^{ikm \frac{2\pi}{n}}$ sono periodici in K con periodo n per cui l'ultima sommatoria può iniziare da qualunque valore di k' , cioè è:

$$\sum_{k=1}^n p_{t+k} e^{ikm \frac{2\pi}{n}} = e^{-i(t-s)m \frac{2\pi}{n}} \sum_{k=1}^n p_{s+k} e^{ik'm \frac{2\pi}{n}}$$

ed infine:

$$(h) \quad V_e^* \simeq V_s^* e^{-i(t-s) m \frac{2\pi}{m}}$$

questo risultato è importantissimo perchè ci dice che il vettore rappresentativo dei passaggi successivi dell'orbita chiusa su n interazioni, indipendentemente dai valori di p_j è un vettore rotante con un angolo $m \frac{2\pi}{m}$ tra due posizioni successive. Di conseguenza la successione dei segni dei passaggi è determinata, e per il criterio di consistenza (b) anche gli n valori di p_j che devono coincidere coi precedenti (a meno di un segno che moltiplica tutto). Da notare però che fissato p_j dalle (d) risulta fissato z_j . Se la posizione reciproca delle due successioni di segni non è quella giusta, l'orbita non è fisicamente possibile. In pratica come si vedrà in seguito risulta sempre al variare di μ e di m .

$$z_j p_j < 0 \quad \text{oppure:}$$

$$z_j p_j > 0$$

cioè è possibile o l'orbita per l'interazione elettrone-positrone oppure quella per l'interazione elettrone-elettrone.

Rimandiamo per ora la ricerca dei valori di μ che soddisfano l'una o l'altra condizione e poniamo in evidenza due proprietà che seguono dalla (h) e dalla (b):

- 1) La differenza tra numero di passaggi positivi e negativi è la minima possibile, cioè 1 quando n è dispari, nulla quando n è pari.
- 2) La successione dei segni è tale da rendere massima la lunghezza del vettore rotante:

$$\sum_{k=1}^n p_{j+k} e^{ikm \frac{2\pi}{n}}$$

che, per n grande, è con buona approssimazione $(2n)/\pi$.

Dalle (g) postote $\theta = (\mu - m \frac{2\pi}{n})$ risulta:

$$(i) |V_j^*| \approx \frac{\Delta z'}{\pi} \frac{\sin \frac{n}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sin n\theta} \approx \frac{\Delta z'}{\pi \theta}$$

cioè a parità di θ nell'ordine delle approssimazioni fatte tutte le orbite chiuse hanno la stessa ampiezza massima indipendentemente da n .

Questa indipendenza da n e la proprietà 2) suggeriscono di interpretare un'orbita chiusa come l'effetto coerente di n perturbazioni distinte ognuna delle quali produce un effetto $n \frac{\pi}{2}$ volte più piccolo.

Infatti poichè le equazioni (a) sono lineari ogni orbita chiusa può essere considerata la sovrapposizione di n orbite chiuse ciascuna provocata da un solo termine noto.

Ciò detto è utile studiare le orbite chiuse su n intervalli di interazione provocate da una sola perturbazione.

Ognuna di queste orbite chiuse può a ragione essere considerata come l'orbita chiusa su di una sola interazione di una macchina con un μ n volte maggiore.

Dalle formule (d) risulta allora:

$$z = \frac{\Delta z'}{2} \rho \frac{\sin \frac{n\mu}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}}$$

Per $\mu \approx m \frac{2\pi}{n}$ risulta:

$$z \approx \frac{\Delta z'}{2n\theta}$$

formula che conferma quanto detto precedentemente.

Il fattore $2/\pi$ che moltiplica la somma nella (i) è dovuta al fatto che la somma è vettoriale e non scalare.

L'unica condizione di compatibilità fisica per quest'orbita diviene (per interazione elettroni-positroni) $z_p < 0$ cioè:

$$\cotg \frac{n\mu}{2} < 0$$

e i valori di μ per i quali questa condizione è soddisfatta sono:

$$(1) \quad (2K - 1) \frac{\pi}{n} < \mu < \frac{2K\pi}{n} \quad K = 1, 2, \dots, n$$

Negli intervalli intermedi sono possibili le orbite per l'interazione elettrone-elettrone.

Poichè per un'orbita chiusa provocata da perturbazioni l'effetto è coerente, è plausibile ritenere che la formula (1) valga anche in questo caso.

I risultati dei calcoli numerici (v. fig. 4) permettono di precisare meglio la regola che è la seguente.

Se la permutazione relativa a n interazioni è dotata di periodicità o pseudoperiodicità sottomultiple di n , ove con pseudoperiodicità intendiamo l'alternarsi di un gruppo di segni con un gruppo di segni opposti, allora nella formula (1) a n va sostituito il suo sottomultiplo n^* che comprende la periodicità o pseudoperiodicità e nel caso di pseudoperiodicità il segno della disuguaglianza va invertito.

Es.:

$$\| + + \| - - \| + + \| - - \| \quad n = 4$$
$$n^* = 2$$

$$\| \begin{matrix} + + - + - \\ - - + - + \end{matrix} \| \quad n = 10$$

$$n^* = 5$$

Il caso di una periodicità sottomultipla di n è artificioso.

Nel caso invece di una pseudoperiodicità possiamo considerare l'orbita chiusa dovuta alle n perturbazioni somma di n^* orbite ognuna delle quali dovuta a due sole perturbazioni distanziate di $n^*\mu$. Come sopra ognuna di queste orbite può essere considerata l'orbita chiusa su due interazioni di una macchina con un μ n^* volte maggiore. Le formule (d) danno in questo caso:

$$z_j = -p_j \quad \Delta z' \frac{t_0}{2} \frac{n^*\mu}{2}$$

e il criterio di consistenza diviene:

$$\Delta z' \frac{t_0}{2} \frac{n^*\mu}{2} > 0$$

da cui:

$$(m) \quad (2k+1) \frac{\pi}{n^*} > \mu > 2k \frac{\pi}{n^*}$$

Per ciascun n al variare di μn^* può variare; in tal caso la possibilità dell'esistenza dell'orbita è determinata dalla formula (m) con l' n^* relativo a ciascun valore di μ .

Per μ di poco superiore a $\bar{\mu}$ posto $\mu = \bar{\mu} + \epsilon$ risulta $\theta = \frac{(\bar{\mu} - n\epsilon)}{n}$ e dalla (i):

$$(v_j^{n^*}) \approx \frac{\Delta z' n}{\pi (\bar{\mu} - n\epsilon)}$$

cioè a parità di μ le ampiezze risultano proporzionali a n ed in particolare quelle relative a $n = 1$ e $n = 2$ sono le meno ampie come già detto.

Oltre alle orbite chiuse così determinate, ve ne sono altre ove l'effetto delle n perturbazioni non è coerente e quindi l'ampiezza minore. Un esempio è l'orbita chiusa con $n = 6$ possibile per $180^\circ < \mu < 200^\circ$ riportata nella fig.

Le particolarità di quest'orbita connesse tra loro sono:

- 1) I vettori $e^{ik\mu}$ sono disposti nel piano in modo tale che una retta passante per il centro può assumere delle posizioni per le quali 4 vettori sono da una parte e 2 dall'altra. E' questo il caso in cui l'approssimazione di considerare un solo termine a 2° membro della formula (e) è errata.
- 2) Mentre le orbite chiuse più ampie al limite superiore dell'intervallo di possibile esistenza vanno all' ∞ , per quest'ultima tutti i passaggi rimangono finiti e uno in particolare va a 0.

Bibliografia

- (1) F. Amman and D. Ritson, "Space charge effects in e^-e^- and e^+e^- colliding or crossing beam rings", Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-61/38 (1961).
- (2) F. Amman, M. Bassetti, M. Bernardini, G. Corazza, A. Masarotti, L. Mango, C. Pellegrini, M. Placidi, M. Puglisi ed F. Tazzioli, "Gli anelli di accumulazione per elettroni e positroni ad alta energia in progetto presso i Laboratori Nazionali di Frascati", La Ricerca Scientifica, in corso di pubblicazione.
- (3) C. Bernardini, "The z-distribution of an electron beam in a storage ring", Laboratori Nazionali di Frascati, LNF-62/54 (1962).

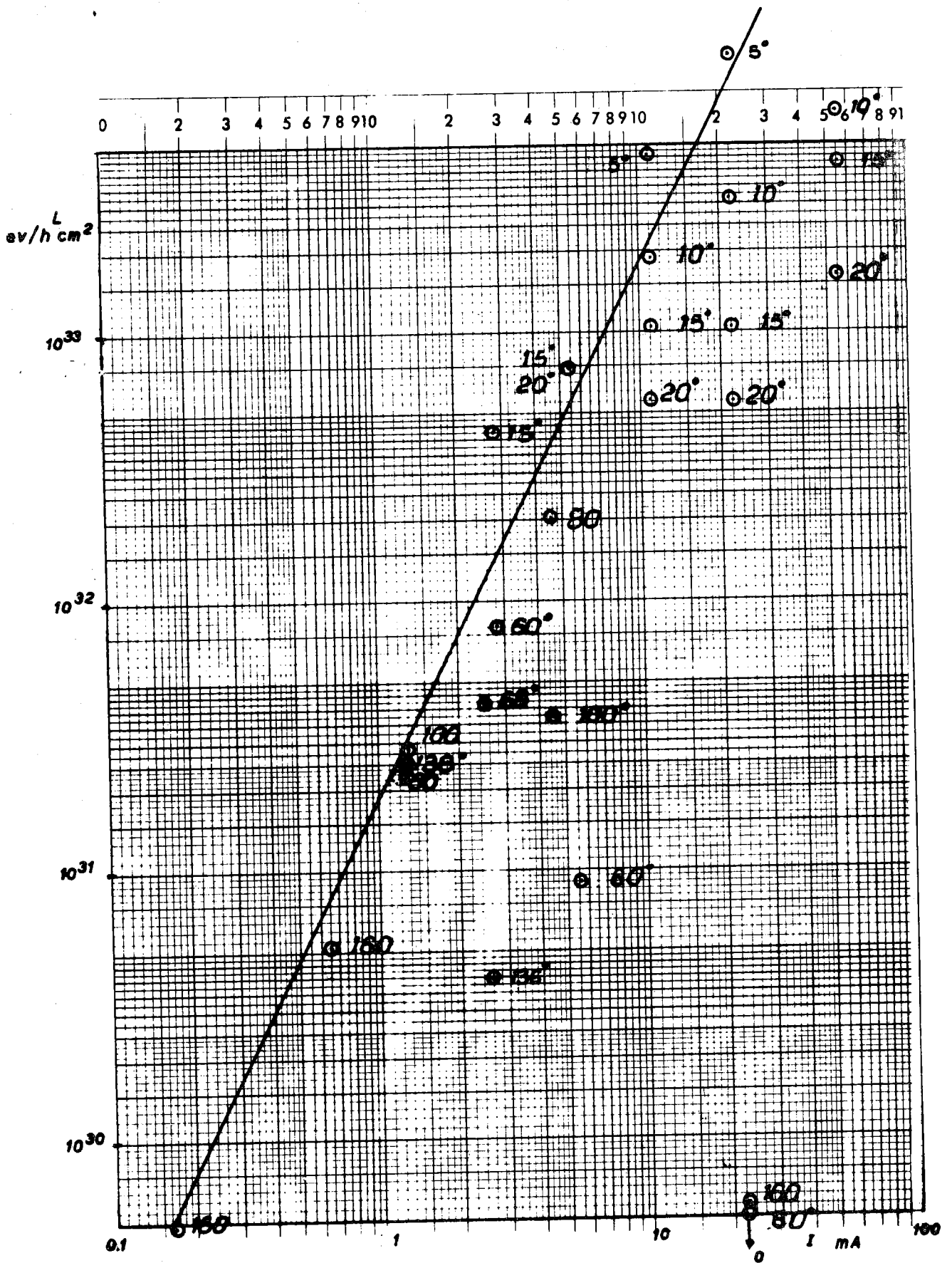


FIG. 1

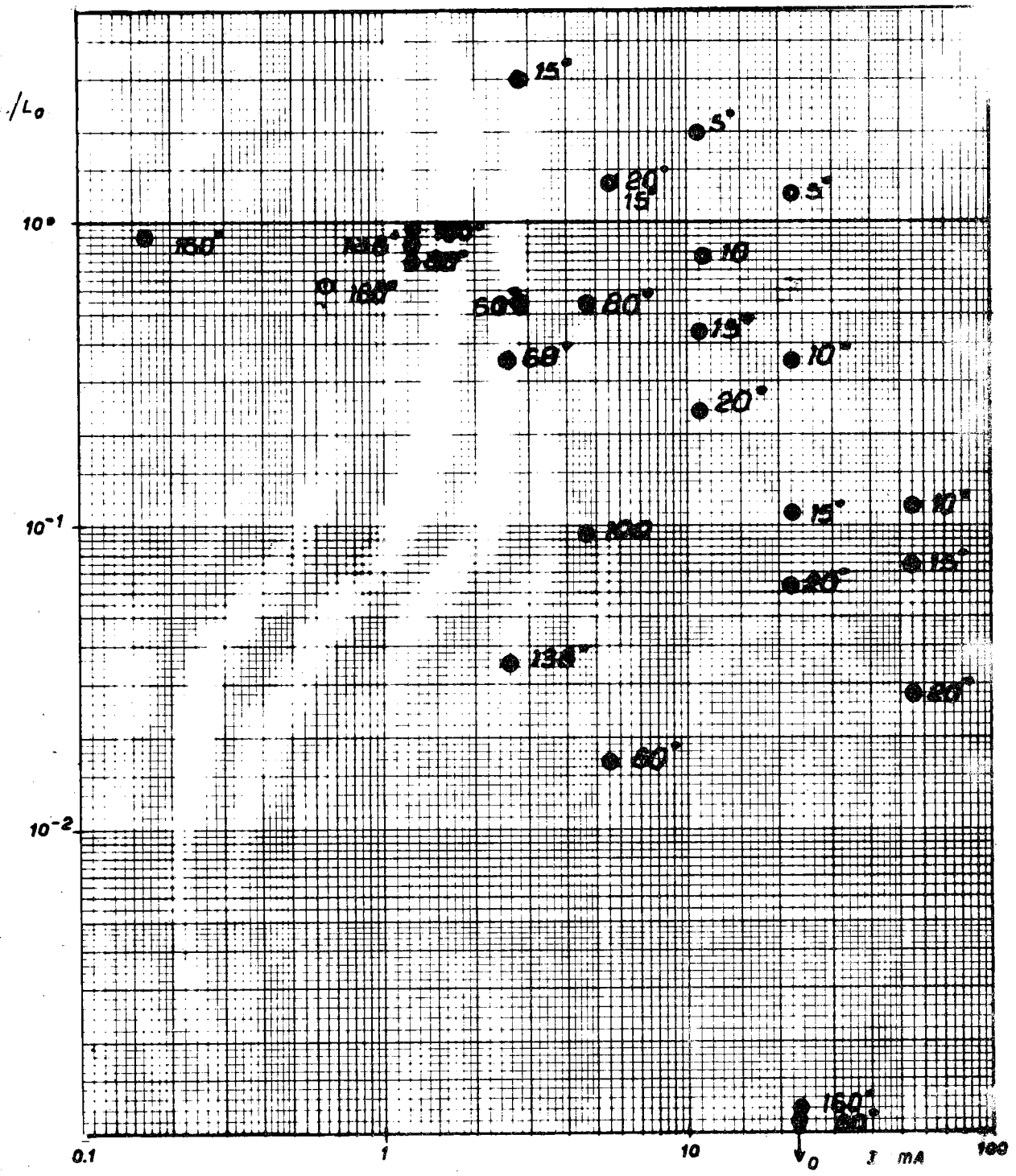


FIG. 2

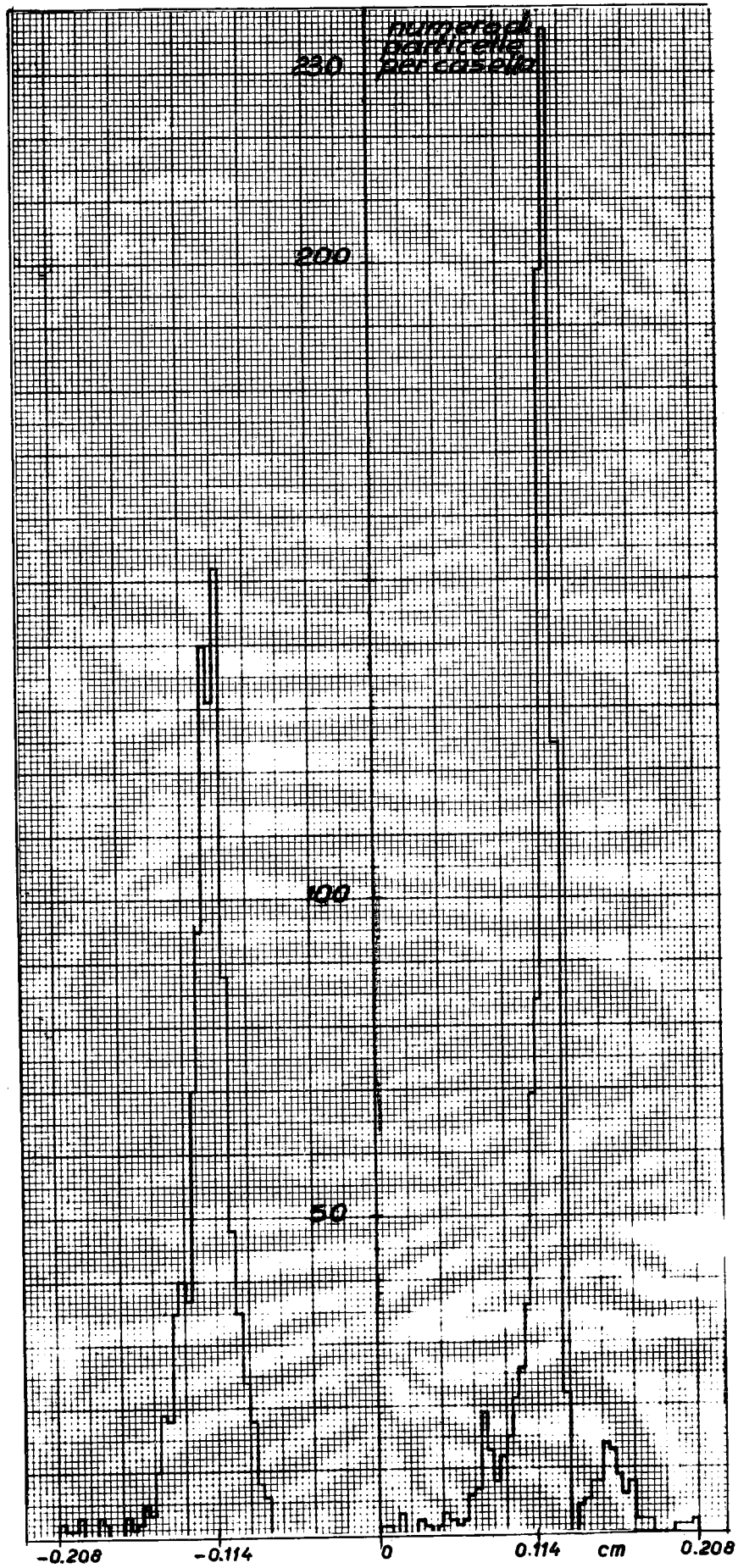


FIG. 3 - ESEMPIO DI FASCI COMPLETAMENTE SEPARATI PER
 $\mu = 160^\circ$ $\Delta z' = 4 \times 10^{-2}$.
 I FASCI SONO DISTRIBUITI ATTORNO ALL'ORBITA CHIUSA \pm
 DI AMPIEZZA 0.114 cm.

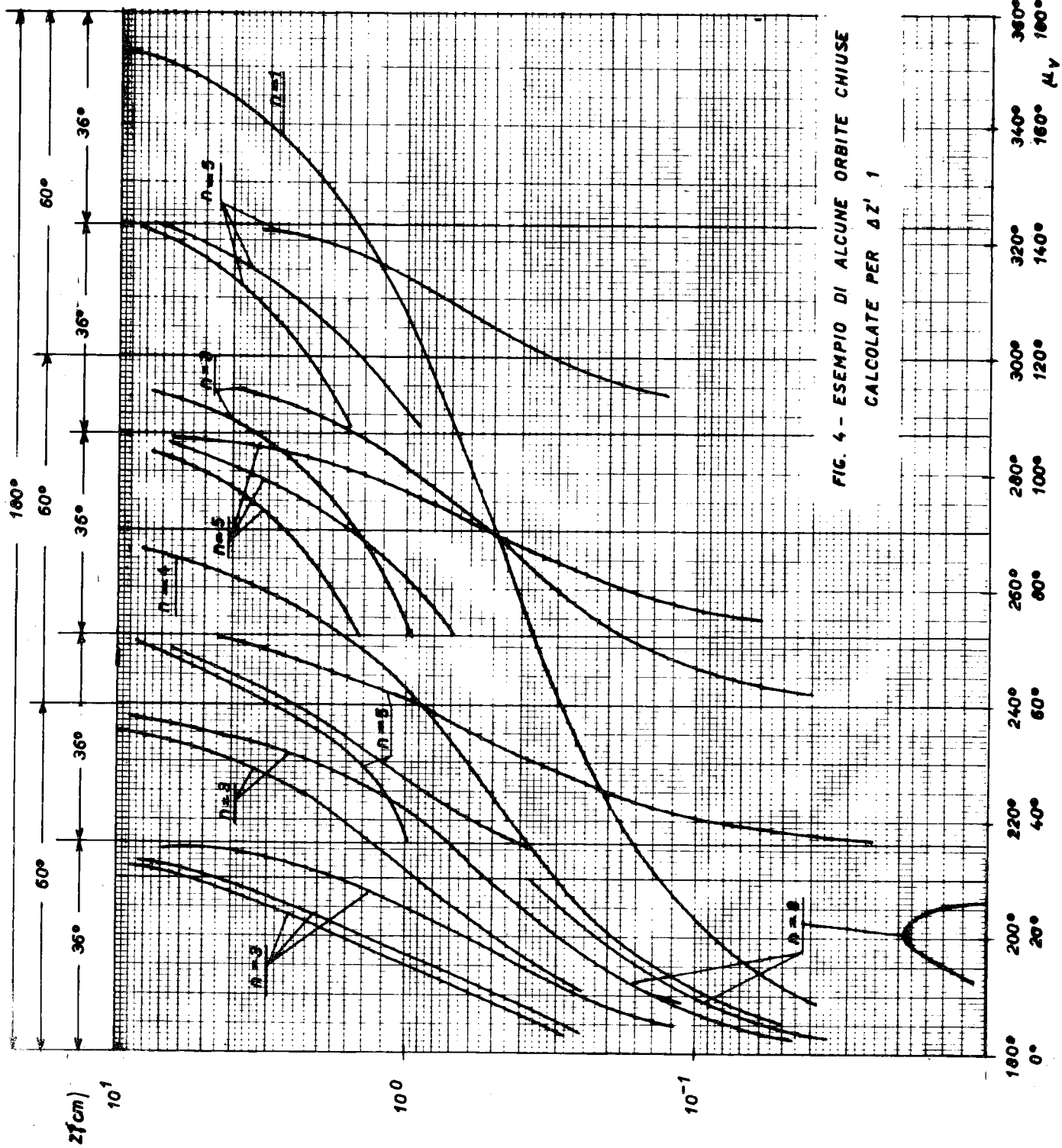


FIG. 4 - ESEMPIO DI ALCUNE ORBITE CHIUSE
CALCOLATE PER $\Delta z' = 1$

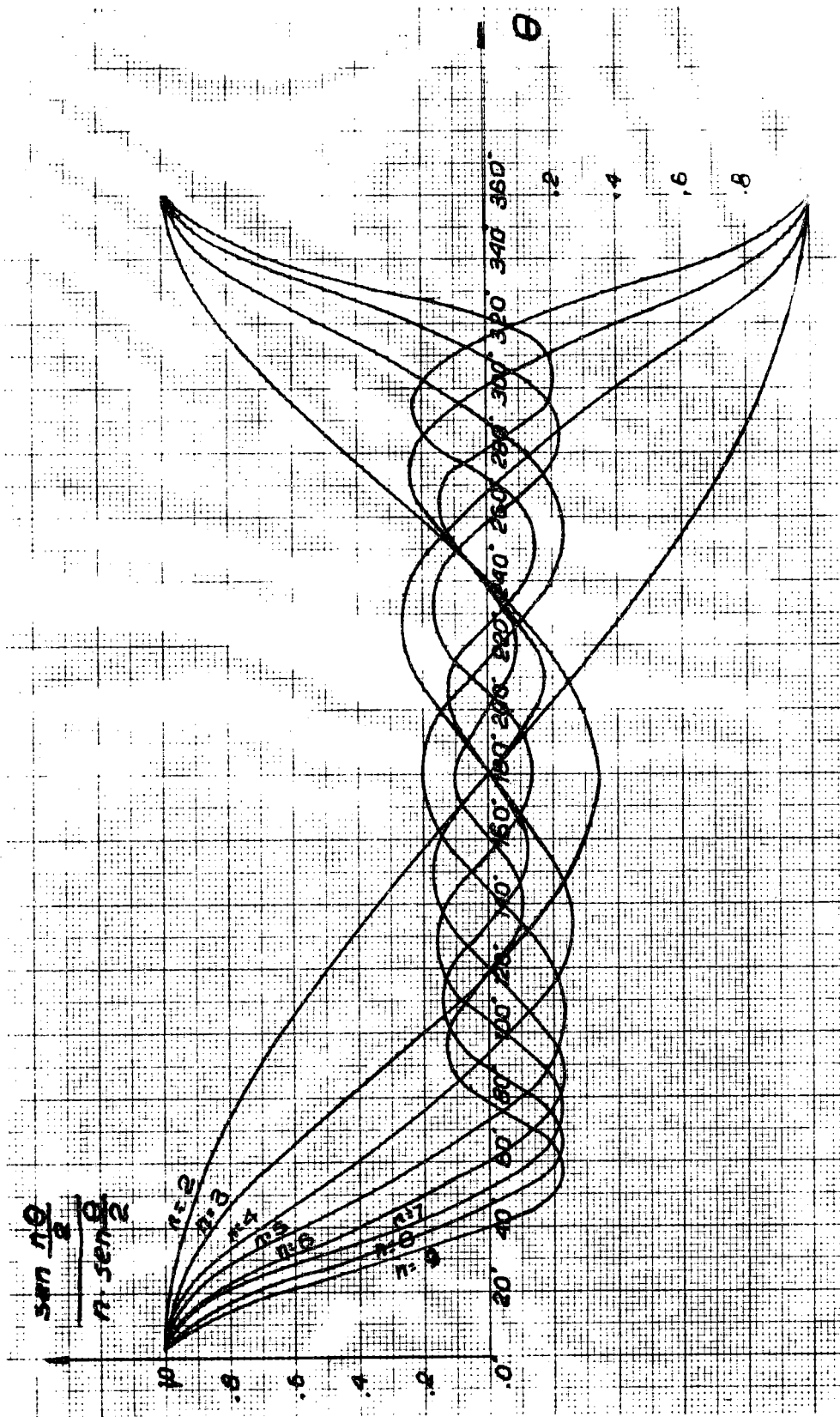


FIG. 5